Σεπτέμβριος 2022, Απειροστικός Λογισμός 1, Τμήμα Α

Διάρκεια 2 Ώρες

Θέμα 1

(i) (1,75 Μονάδες) Αποδείξτε ότι αν $n \in \mathbb{N}$ και $x > -1$, ισχύει $(1+x)^n \geq 1 + nx$ (Υπόδειξη: Μπορείτε να χρησιμοποιήσετε τη μέθοδο της επαγωγής).

(ii) (0,25 Μονάδες) Διατυπώστε τον ε- ορισμό της σύγκλισης μιας ακολουθίας a_n σ΄ έναν πραγματικό αριθμό l ($a_n \to l$).

Θέμα 2

(i) (1,25 Μονάδες) Ας είναι $a \in \mathbb{R} - \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι υπάρχει ακολουθία ρητών αριθμών $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ τέτοια ώστε $a_n \to a$.

(ii) (1,75 Μονάδες) Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ με $f(x) = x^2, x \in \mathbb{Q}$. Αποδείξτε ότι η $f(\sqrt{2}) = 2$.

Θέμα 3 (1,75 Μονάδες)
Δίνεται συνεχής συνάρτηση $f\colon [0,2] \to \mathbb{R}$ με $f(0) = f(2)$ και $f(0) \neq f(1)$. Αποδείξτε ότι υπάρχει $x_0 \in (0,1)$ ώστε $f(x_0) = f(x_0+1)$ (Υπόδειξη: Μπορείτε να θεωρήσετε τη συνάρτηση $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ με τύπο $g(x) = f(x) - f(x+1)$).

Θέμα 4 (1,75 Μονάδες)
Δίνεται μια συνεχής συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ τέτοια ώστε $f(x) \in \mathbb{Q}$, για κάθε $x \in \mathbb{R}$. Αποδείξετε ότι η συνάρτηση f είναι σταθερή.

Θέμα 5 (1,5 Μονάδες)

(i) (0,25 Μονάδες) Διατυπώστε (ορισμός) πότε μια συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ λέγεται παραγωγίσιμη σε ένα σημείο $a \in \mathbb{R}$ και δώστε τον ορισμό του $f'(a)$.

(ii) (1,75 Μονάδες) Δίνεται μια παραγωγίσιμη συνάρτηση $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ στο σημείο $a = 0$ τέτοια ώστε $f(0) = 0$ και $f'(0) = 2$. Αποδείξτε ότι η ακολουθία $x_n = nf\left(\frac{1}{n}\right)$, $n \in \mathbb{N}$ συγκλίνει στον αριθμό 2.

ΚΑΛΗ ΤΥΧΗ!!